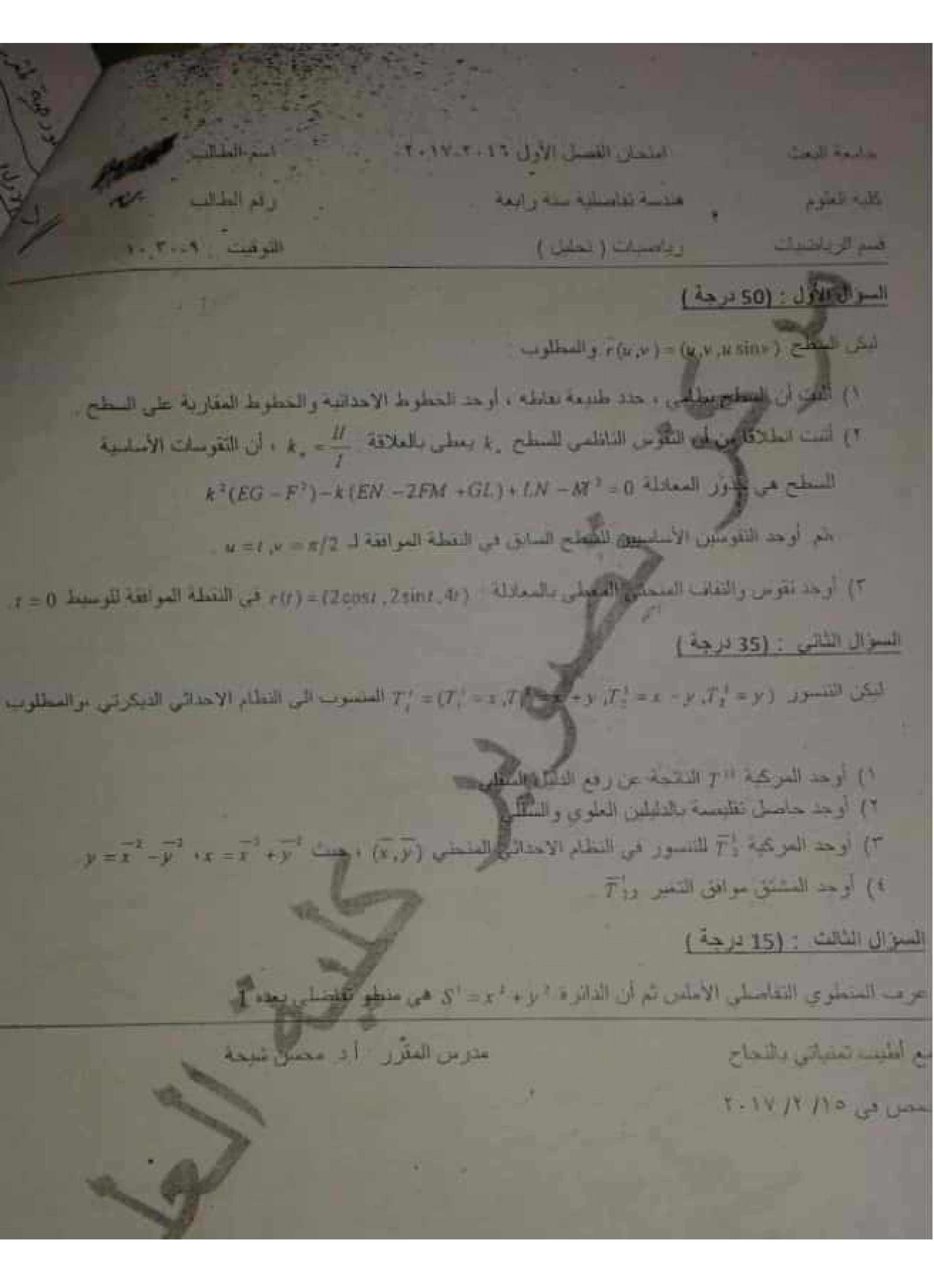


جامعة البعث | امتحان الفصل الأول ٢٠١٦-٢٠١٧ | اسم الطالب
كلية العلوم | هندسة تفاضلية سنة رابعة | رقم الطالب
قسم الرياضيات | رياضيات (تحليل) | التوقيت ٩-١٠.٣٠

السؤال الأول : (50 درجة)

ليكن السطح $\vec r(u,v)=(u,v,u\sin v)$ والمطلوب :

١) أثبت أن السطح مسطري ، حدد طبيعة نقاطه ، أوجد الخطوط الاحداثية والخطوط المقاربة على السطح .

٢) أثبت انطلاقاً من أن التقوس الناظمي للسطح k_n يعطى بالعلاقة $k_n=\frac{II}{I}$ ، أن التقوسات الأساسية للسطح هي جذور المعادلة $k^2(EG-F^2)-k(EN-2FM+GL)+LN-M^2=0$

ثم أوجد التقوسين الأساسيين للسطح السابق في النقطة الموافقة لـ $u=t, v=\pi/2$.

٣) أوجد تقوس والتفاف المنحني المعطى بالمعادلة $r(t)=(2\cos t, 2\sin t, 4t)$ في النقطة الموافقة للوسيط $t=0$.

السؤال الثاني : (35 درجة)

ليكن التنسور $T_i^j=(T_1^1=x, T_1^2=x+y, T_2^1=x-y, T_2^2=y)$ المنسوب الى النظام الاحداثي الديكرتي ، والمطلوب :

١) أوجد المركبة T^{11} الناتجة عن رفع الدليل السفلي .

٢) أوجد حاصل تقلص الدليلين العلوي والسفلي .

٣) أوجد المركبة $\overline{T}_2^1$ للتنسور في النظام الاحداثي المنحني $(\bar x,\bar y)$ ، حيث $x=\bar x^2+\bar y^2$ ، $y=\bar x^2-\bar y^2$

٤) أوجد المشتق موافق التغير $\overline{T}_{1;1}^1$.

السؤال الثالث : (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي الأملس ثم أثبت أن الدائرة $S^1=x^2+y^2$ هي منطوٍ تفاضلي بعده 1 .

مع أطيب تمنياتي بالنجاح — مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة

حمص في ١٥ /٢ /٢٠١٧

نموذجية لمقرر الهندسة التفاضلية - سنة رابعة رياضيات (تحليل) الفصل الأول 2016 - 2017

$r(u,\theta) = (u, \theta, u\sin\theta)$ — الحل 2

$E = (\vec{r}_u)^2 = (1, 0, \sin\theta)^2 = 1+\sin^2\theta$, $\vec{r}_\theta = (0, 1, u\cos\theta)$, $F = r_u \cdot r_\theta = u\sin\theta\cos\theta$

$G = r_\theta^2 = 1 + u^2\cos^2\theta$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_\theta = \frac{(-\sin\theta, -u\cos\theta, 1)}{\sqrt{1+\sin^2\theta + u^2\cos^2\theta}},$$

$\vec{r}_{uu} = (0,0,0)$, $\vec{r}_{u\theta} = (0,0,\cos\theta)$, $\vec{r}_{\theta\theta} = (0,0,-u\sin\theta)$

$$L = \vec{r}_{uu}\cdot\vec{n} = 0,\quad M = \vec{r}_{u\theta}\cdot\vec{n} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta+u^2\cos^2\theta}},\quad N = \vec{r}_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = \frac{-u\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta+u^2\cos^2\theta}}$$

$$LN - M^2 = \frac{-\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta+u^2\cos^2\theta} < 0$$ جميع نقاط السطح زائدية

لأن $|\vec{r}_u \times \vec{r}_\theta| \neq 0$ فالسطح نظامي

الخط الإحداثي $u = const$ يمثل θ متحول ويكون الخط $z = \sin y$ وهو منحني جيبي يقع في المستوي $x = c$

الخط الإحداثي $\theta = const$ يمثل u متحول ويكون $z = c\,x$ وهو خط مستقيم يقع في المستوي $y = c$

لإيجاد الخطوط المقاربة نكتب $II = 0$ فنجد:

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,d\theta + N\,d\theta^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta\,du\,d\theta - u\sin\theta\,d\theta^2 = 0 \Rightarrow 2\frac{du}{u} = tg\,\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow 2\ln u = -\ln\cos\theta + \ln c \Rightarrow \frac{u^2}{c} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow u^2 = \frac{c}{\cos\theta}$$

ليكن (φ,ψ) منحى مماس للسطح عندئذ:

$$K_n = K(\varphi,\psi) = \frac{L\varphi^2 + 2M\varphi\psi + N\psi^2}{E\varphi^2 + 2F\varphi\psi + G\psi^2}$$

إن K_n دالة تابعة للاشتقاقات بالنسبة لـ φ, ψ حيث المعاملات L, M, N, E, F, G لا تتعلق بالمنحى (φ,ψ) إنما بموضع النقطة M. نفرض $\varphi = \cos\theta$، $\psi = \sin\theta$ عندئذ:

$$K_n = K_n(\varphi) = \frac{L\cos^2\varphi + 2M\cos\varphi\sin\varphi + N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi + 2F\cos\varphi\sin\varphi + G\sin^2\varphi}$$

حيث إن $K_n(\varphi)$ دالة مستمرة و $K(0) = K(2\pi)$ لذلك فإن K_n إما دالة ثابتة أو لها قيمة صغرى وقيمة عظمى

نسمي القيم المحصورة بالقيم الأساسية، نستخرج من العلاقة الأخيرة بفرض $K_n = K(\varphi,\psi)$ نجد:

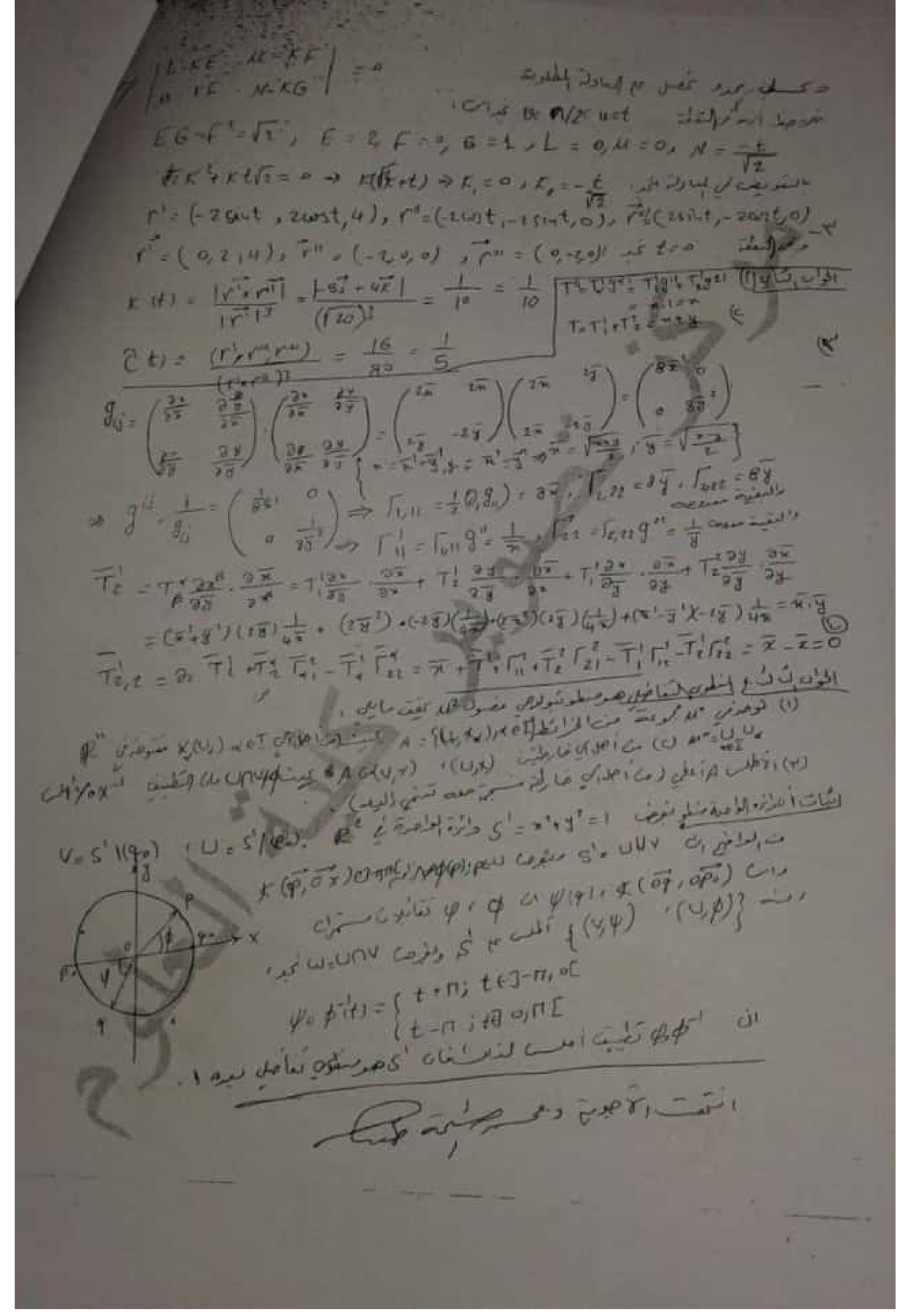
$$(L - KE)\varphi^2 + 2(M - KF)\varphi\psi + (N - KG)\psi^2 = 0$$

هي علاقة في φ, ψ ومع اعتبار أن مشتق التقوس الأساسي وفق المنحني الأساسي معدوم وبالتالي مشتقات العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ φ والأخرى بالنسبة لـ ψ نجد:

$$(L - KE)\varphi + (M - KF)\psi = 0$$

$$(M - KF)\varphi + (N - KG)\psi = 0$$

وهما معادلتان جبريتان خطيتان بالنسبة لـ φ, ψ تملكان حلاً غير الحل الصفري حيث إنه من النقطة المعطاة للسطح دوماً يوجد منحنيان أساسيان



$EG - F^2 = \sqrt{2}$; $E = 2$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 0$, $M = 0$, $N = \frac{-t}{\sqrt{2}}$

$K_1 = 0$, $K_2 = -\frac{t}{\sqrt{2}}$

$r' = (-2\sin t, 2\cos t, 4)$, $r'' = (-2\cos t, -2\sin t, 0)$, $r''' = (2\sin t, -2\cos t, 0)$

$r' = (0, 2, 4)$, $r'' = (-2, 0, 0)$, $r''' = (0, -2, 0)$ عند $t = 0$

$K(t) = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{1}{10}$

$\tau(t) = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$

$g^{ij} = \frac{1}{g_{ij}}$

$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2}\partial_1 g_{11}$, $\Gamma^1_{11} = \Gamma_{1,11} g^{11}$

$\bar{T}_{2,t} = \bar{x} - \bar{x} = 0$

انتهت الأجوبة